# Дидактические материалы по теме "Использование метода замены множителей при решении неравенств"

**Автор: Полякова Галина Алексеевна**

**ГБОУ Средняя школа № 520 Колпинского района Санкт-Петербурга**

**Аннотация:** Данное методическое пособие рекомендуется использовать не только для подготовки обучающихся 11 классов к итоговой аттестации, но и на уроках математики, начиная с 8 класса, при изучении любых видов неравенств, в том числе иррациональных, а так же содержащих модули и параметры.

**Ключевые слова:** неравенства, замена множителей, рационализация

**Метод замены множителей при решении неравенств**

**Теорема 1:** неравенство $f(x)>g(x)$ при $f(x)>0$ и $g(x)\geq 0$ равносильно неравенству $f^2(x)>g^2(x)$, т.е. неравенство $f(x) - g(x) >0$ равносильно неравенству $f^2(x) - g^2(x) > 0$.

**Доказательство**

**1. <u>Необходимость</u>**: $f(x) - g(x) >0 \Rightarrow f^2(x) - g^2(x) > 0$.

$f^2(x) - g^2(x) = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$. Так как $f(x)>0$ и $g(x)\geq 0$ , то $f(x) + g(x)>0$; $f(x) - g(x)>0$ по условию, поэтому их произведение >0 ,т.е. $f^2(x) - g^2(x) > 0$.

**2. <u>Достаточность</u>:** $f^2(x) - g^2(x) > 0 \Rightarrow f(x) - g(x) >0$.

$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))>0$, разделим обе части на $f(x) + g(x)>0$, получим равносильное $f(x) - g(x)>0$. **Чтд.**

На этом факте основан способ решения неравенств, который называют методом замены множителей.

**Неравенства, содержащие модуль.**

Так как $|\varphi(x)|\geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то неравенство $|f(x)| - |g(x)| >0$ равносильно неравенству $f^2(x) - g^2(x) > 0$, т.е. неравенству
$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))>0$.

**Справедлива замена:**

| **№** | **Выражение** | **Замена** |
|---|---|---|
| **1.** | $\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert > 0$ | $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))>0$. |
| | $\lvert f(x)\rvert - g(x) > 0$ | $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))>0$, при $g(x)\geq 0$. |
| **2.** | $\dfrac{\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert}{\lvert \alpha(x)\rvert - \lvert \beta(x)\rvert} > 0$ | $\dfrac{\mathbf{f^2(x) - g^2(x)}}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \beta^2(\mathbf{x})} > 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{\lvert f(x)\rvert - g(x)}{\lvert \alpha(x)\rvert - \beta(x)} > 0$ | $\frac{\mathbf{f^2(x)-g^2(x)}}{\alpha^2(x)-\beta^2(x)} > 0$, при $g(x) \geq 0, \beta(x) \geq 0$ |
| **3.** | $(\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert) \cdot (\lvert \propto (x)\rvert - \lvert \beta(x)\rvert) > 0$ | $(f^2(x) - g^2(x)(\alpha^2(\mathbf{x}) - \beta^2(\mathbf{x})) > 0$ |

**Упражнения:**

1) $\big||2x+1|-5\big| > 2.$ Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 1) \cup (3; +\infty)$

2) $|x^2-2x| < x.$ Ответ: $x \in (1; 3)$

3) $|x^2-1| < x^2 - |x| + 1.$ Ответ: $x \in (-2; -0{,}5) \cup (0{,}5; 2).$

4) $\mathbf{\big||2x^2-x|-3\big| \leq (2x^2+x+5)}.$ **Решение:** Так как $\mathbf{2x^2+x+5} > 0$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R})$,
То, произведя замену, получим $\mathbf{(|2x^2-x|-3)^2 - (2x^2+x+5)^2 \leq 0}$, $\mathbf{(|2x^2-x|-3-2x^2-x-5)(|2x^2-x|-3+2x^2+x+5) \leq 0}$,
$\mathbf{(|2x^2-x|-(2x^2+x+8)(|2x^2-x|+2x^2+x+2) \leq 0}$,
и так как $\mathbf{|2x^2-x|+2x^2+x+2 \geq 0}$ $(\forall \mathbf{x})$, то
полученное нер – во равносильно $\mathbf{(|2x^2-x|-(2x^2+x+8) \leq 0}$, снова замену $\mathbf{(2x^2-x)^2-(2x^2+x+8)^2 \leq 0}$,
$\mathbf{(2x^2-x-2x^2-x-8)(2x^2-x+2x^2+x+8) \leq 0}$;
$\mathbf{x+4 \geq 0}$ **Ответ:** $\mathbf{x} \in [\mathbf{-4}; +\infty).$

5) $\frac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|} \leq 1.$ Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$

6) $\mathbf{\frac{|3x-2|-|2x-3|}{|x^2+x-8|-|x^2-x|} \leq 0}.$
**Решение:** $\mathbf{\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2} \leq 0}$; $\mathbf{\frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)} \leq 0}$; $\mathbf{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x+2)(x-2)} \leq 0}$; **Ответ:** $\mathbf{x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)}$

7) $\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1} \geq 0.$
Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; +\infty)$

8) $\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{2}{|x+1|-2}.$ Ответ: $x \in (-3; -2) \cup \{-1\} \cup (0; 1).$

9) $\frac{\big||x^2+x|-3\big|-3}{\big||3x+4|-2\big|-1} \geq 0.$ Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup \left(\frac{-7}{3}; \frac{-5}{3}\right) \cup \left(-1; \frac{-1}{3}\right) \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$

10) $\mathbf{\frac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \frac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}}.$ **Решение:** Умножим на $\mathbf{\frac{|x-5|+|x+4|}{|x-2|+|x+1|}}$ так как это выражение положительно $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R})$, то знак неравенства сохранится.
$\mathbf{\frac{(x-5)^2-(x+4)^2}{(x-2)^2-(x+1)^2} < \frac{|x-5|+|x+4|}{|x+4|}}$; $\mathbf{\frac{(x-5+x+4)(x-5-x-4)}{(x-2+x+1)(x-2-x-1)} < \frac{|x-5|+|x+4|}{|x+4|}}$;
$\mathbf{\frac{-9(2x-1)}{-3(2x-1)} < \frac{|x-5|+|x+4|}{|x+4|}}$; $\begin{cases} 3|x+4| < |x-5|+|x+4| \\ 2x-1 \neq 0, \quad x+4 \neq 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \mathbf{2|x+4| < |x-5|} \\ \mathbf{x \neq 0{,}5, \quad x \neq -4} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathbf{x^2+14x+13 < 0} \\ \mathbf{x \neq 0{,}5, \quad x \neq -4} \end{cases}$
**Ответ:** $\mathbf{x \in (-13; -4) \cup (-4; -1)}.$

**Иррациональные неравенства**

Рассмотрим неравенство

$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ и пусть $\varphi(x) = \sqrt{f(x)}$, $\omega(x) = \sqrt{g(x)}$.

Функции $\varphi(x)$ и $\omega(x)$ неотрицательны при $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$,

тогда согласно теореме I неравенство $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} > 0$ равносильно неравенству $f(x) - g(x) > 0$.

Таким образом, множитель $\sqrt{\mathbf{f(x)}} - \sqrt{\mathbf{g(x)}}$ заменяем на $\mathbf{f(x)} - \mathbf{g(x)}$.

Полезна будет **замена множителей**

| **№** | **Выражение** | **Замена** |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ | $f(x) - g(x)$, при $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$ |
| | $f(x) - \sqrt{g(x)}$ | $f^2(x) - g(x)$, при $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$ |
| **2.** | $\dfrac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{\sqrt{\alpha(x)} - \sqrt{\beta(x)}}$ | $\dfrac{f(x) - g(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$, при $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0,$ $\alpha(x) \ge 0,\quad \beta(x) \ge 0,\quad \alpha(x) \ne \beta(x)$ |
| | $\dfrac{\lvert f(x)\rvert - \sqrt{g(x)}}{\lvert\alpha(x)\rvert - \beta(x)}$ | $\frac{f^2(x) - g(x)}{\alpha^2(x) - \beta^2(x)}$ при $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0,$ $\alpha(x) \ge 0, \beta(x) \ge 0,\quad \lvert\alpha(x)\rvert \ne \beta$ |

**Упражнения:**

1) $\sqrt{3 + x} > |3 - x|$. Ответ: $x \in (1; 6)$.

2) $\frac{2x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \le 3$. Ответ: $x \in \left[-1; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

3) $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x^2 + 5x - 2} < 0$. Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

4) $\frac{\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2} - \sqrt[3]{4-x-3x^2}} \ge 0$. Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

5) $\frac{\sqrt{\mathbf{2x^2+5x+4}} - \sqrt{\mathbf{x^2+3x+3}}}{\sqrt[3]{\mathbf{3x^2+10x+5}} + \sqrt[3]{\mathbf{7x+3x^2}}} \ge \mathbf{0}$. **Решение:**

Числитель и знаменатель дроби определены $\forall x \in \mathbb{R}$,
так как дискриминанты квадратных трехчленов в числителе отрицательны, а старшие коэффициенты положительны. Кубические же корни существуют при любом $x \in \mathbb{R}$.
Представим знаменатель дроби в виде разности корней и сделаем замену:

$\frac{\sqrt{\mathbf{2x^2+5x+4}} - \sqrt{\mathbf{x^2+3x+3}}}{\sqrt[3]{\mathbf{3x^2+10x+5}} - \sqrt[3]{\mathbf{-7x-3x^2}}} \ge \mathbf{0}$, $\quad \frac{(\mathbf{2x^2+5x+4}) - (\mathbf{x^2+3x+3})}{(\mathbf{3x^2+10x+5}) - (\mathbf{-7x-3x^2})} \ge \mathbf{0}$,

$\frac{\mathbf{x^2+2x+1}}{\mathbf{6x^2+17x+5}} \ge \mathbf{0}$, $\quad \frac{(\mathbf{x+1})^2}{(\mathbf{2x+5})(\mathbf{3x+1})} \ge \mathbf{0}$,

**Ответ:** $\mathbf{x} \in \left(-\infty; -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right) \cup \{\mathbf{-1}\} \cup \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; +\infty\right)$**.**

6) $\frac{\sqrt{x-1+\sqrt{3x-5}} - \sqrt{x-1+\sqrt{2x-5}}}{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}} < 0$. Ответ: $x \in [2{,}5;\ 4{,}25)$

7) $\frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{4x-6}}{|x^2-x+1| - |x^2-3x+4|} \ge 0$. Ответ: $x \in [3; +\infty)$

**8)** $\frac{\sqrt{x+5}-|x-1|}{\sqrt{x+10}-|x-2|} \geq 0.$ **ЛВВ** Ответ: $x \in [-5;1) \cup (-1;4] \cup (6;+\infty)$

9) $\frac{(|x-2|-4-x^2)(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2})}{(|x-1|-4)(|x+3|-|x-5|)} > 0.$ Ответ: $x \in (-3;-2) \cup [2;5)$

10) $\frac{|x|-\sqrt{24-2x-x^2}}{\sqrt[3]{x^3-x^2-6x+3}-x+1} \leq 0.$ Ответ: $x \in [-4;\frac{1}{2}) \cup [3;4).$

11) $\frac{\sqrt{3x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x+1}}{|2x^2-x-1|-|12x^2+7x+1|} \geq \mathbf{0}.$ Найдите сумму всех целых чисел, являющихся решением неравенства. **Решение:**

$$\frac{(3x^2-5x+3)-(x^2+x+1)}{(2x^2-x-1)^2-(12x^2+7x+1)^2} \geq \mathbf{0}; \qquad \begin{cases} 3x^2-5x+3 \geq 0; \\ x^2+x+1 \geq 0; \\ \frac{2x^2-6x+2}{(14x^2+6x)(-10x^2-8x-2)} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{x\left(x+\frac{3}{7}\right)} \leq 0; \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \left(-\frac{3}{7};0\right) \cup \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

В решение входят целые числа: 1и 2, сумма которых равна 3. **Ответ: 3**

12) $\frac{13-3x+\sqrt{x^2-x-6}}{5-x} > 1.$ Ответ: $x \in (-\infty;2] \cup [3;5) \cup (7;+\infty)$

13) $\frac{26-3x+\sqrt{x^2-2x-24}}{x-10} < -1.$ **Решение**:

$\frac{\sqrt{x^2-2x-24}-(2x-16)}{x-10} < 0.$ ОДЗ: $x \in (-\infty;-4] \cup [6;10) \cup (10;+\infty).$

При $x \in (-\infty;-4] \cup [6;8)$ числитель дроби положителен, а знаменатель отрицателен, поэтому все $x \in (-\infty;-4) \cup [6;8)$ явл-ся решением нер-ва.

При $x \in [8;10) \cup (10;+\infty)$ нер- во перепишем так:

$\frac{\sqrt{x^2-2x-24}-\sqrt{(2x-16)^2}}{x-10} < 0,$ $\frac{(x^2-2x-24)-(4x^2-64x+256)}{x-10} < 0;$

$\frac{3x^2-62x+280}{x-10} > 0;$ $\frac{(x-14)(3x-20)}{x-10} > 0;$ С учетом ограничения $x \in [8;10) \cup (10;+\infty)$ мн-во решений $x \in [8;10) \cup (14;+\infty).$

Окончательно имеем: **Ответ:** $\mathbf{x \in (-\infty;-4] \cup [6;10) \cup (14;+\infty)}$

| № | Выражение | Замена |
|---|---|---|
| **1.** | $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ | $(a-1)(f(x)-g(x))$, при $a>0$ и $a \neq 1$ |
| | $(u(x))^{f(x)}-(u(x))^{g(x)}$ | $(u(x)-1)(f(x)-g(x))$, при $u(x)>0$ и $u(x) \neq 1$ и если $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл |
| **2.** | $\frac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{h(x)}$ | $\frac{(a-1)(f(x)-g(x))}{h(x)}$, при $a>0$ и $a \neq 1$ и если $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл |
| | $\frac{(u(x))^{f(x)}-(u(x))^{g(x)}}{(v(x))^{h(x)}-(v(x))^{\varphi(x)}}$ | $\frac{(u(x)-1)(f(x)-g(x))}{(v(x)-1)(h(x)-\varphi(x))}$, при $u(x)>0$ и $v(x)>0$ и если $f(x), g(x), h(x), \varphi(x)$ имеют смысл |

| | | |
|---|---|---|
| **3.** | $(u(x))^{f(x)} - (v(x))^{g(x)}$ | $(a-1)\left(\log_a (u(x))^{f(x)} - \log_2 (v(x))^{g(x)}\right)$ |

**Показательные неравенства**

**Упражнения**

1) $|x-3|^{2x^2-7x} > |x-3|^0$. Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 3{,}5) \cup (4; +\infty)$.

2) $(2x-1)^x \geq (2x-1)^{x^2-2}$. Ответ: $x \in [1; 2]$ .

3) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$. Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

4) $(\frac{4x}{5}+1)^{6-13x-15x^2} \geq 1$. Ответ: $x \in \left(-\frac{5}{4}; -\frac{6}{5}\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

5) $(x^2+x+1)^x \leq 1$. Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \{0\}$.

6) $\boldsymbol{\left|3x^2-2\right|^{\sqrt{1+x}} > \left|3x^2-2\right|^{1+\sqrt{x}}}$. **Решение:** ОДЗ: $x \geq 0,\ x \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

$|3x^2-2|^{\sqrt{1+x}} - |3x^2-2|^{1+\sqrt{x}} > 0$. Выполним замену множителей:

$(|3x^2-2|-1)\left(\sqrt{1+x}-\left(1+\sqrt{x}\right)\right) > 0$, снова замену множителей:

$((3x^2-2)^2-1^2)\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(1+\sqrt{x}\right)^2\right) > 0$,

$(3x^2-2-1)(3x^2-2+1)\left(1+x-1-x-2\sqrt{x}\right) > 0$,

$-\sqrt{x}(x-1)(x+1)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, т. к. $x > 0$, то

$(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ и, учитывая ОДЗ, получаем

**Ответ:** $\boldsymbol{x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{3}; 1\right)}$.

7) $\frac{x^2+x-2}{(3^x-1)\left(2^{x^2}-16\right)} \geq 0$. Ответ: $x \in (0; 1] \cup (2; +\infty)$.

8) $\frac{7}{9^x-2} \geq \frac{2}{3^x-1}$. Ответ: $x \in [-\log_3 2; 0) \cup \left(\frac{\log_3 2}{2}; 1\right]$.

9) $\frac{3^{2x^2-3x+4}-\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2-4x-2}}{2^x-1} \leq 0$. **ЛВВ** Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{2}{5}; 1\right]$.

10) $\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1} \leq 0$. **ЛВВ** Ответ: $x \in (-\infty; -2{,}5) \cup (0; 0{,}5]$.

**Логарифмические неравенства**

| № | Выражение | Замена |
|---|---|---|
| **1.** | $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ | $(a-1)\left(f(x) - g(x)\right)$, при $a > 0$ и $a \neq 1$ и если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ |
| | $\log_{u(x)} f(x) - \log_{u(x)} g(x)$ | $(u(x)-1)\left(f(x) - g(x)\right)$, при $u(x) > 0$ и $u(x) \neq 1$ и если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| **2.** | $\dfrac{\log_a f(x)}{\log_b g(x)}$ | $\frac{(a-1)(f(x)-1)}{(b-1)(g(x)-1)}$, при $a>0$, и $b>0$, $b$ и если $f(x)>0$ и $g(x)>0$ |
| **3.** | $\log_a f(x)\cdot\log_b g(x)$ | $(a-1)(f(x)-1)(b-1)(g(x)-1)$ при $a>0$, и $b>0$, и если $f(x)>0$ и $g(x)>0$ |
| **4.** | $(u(x))^{f(x)}-(v(x))^{g(x)}$ | $(a-1)\left(\log_a(u(x))^{f(x)}-\log_2(v(x))^{g(x)}\right)$ |

**Упражнения**

1) $\log_{x^2}(2+x)<\log_{x^2}x^2$. Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$.

2) $\log_{x+3}(x^2-x)<1$. Ответ: $x\in(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(1;3)$.

3) $\log_{x+1}(x^2-x+1)>1$ Ответ: $x\in(2;+\infty)$.

4) $\log_{x+1}(20x+3x^2-x^3)\geq 3$. Ответ: $x\in(1;4]$.

5) $\log_x\sqrt{21-4x}>1$. Ответ: $x\in(1;3)$.

6) $\log_x\frac{x+3}{x-1}>1$. Ответ: $x\in(1;3)$.

7) $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$. Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$.

8) $\mathbf{\log_{|x+2|}(4-2x^2+7x)\leq 2}$. **Решение:**

Запишем нер-во в виде

$\log_{|x+2|}(4-2x^2+7x)-\log_{|x+2|}(x+2)^2\leq 0$; сделаем замену:

$(|x+2|-1)(4-2x^2+7x-(x+2)^2)\leq 0$, при

ОДЗ: $\begin{cases} x+2\neq 0,\\ |x+2|\neq 1,\\ 4-2x^2+7x>0\end{cases}$

Знак множителя $(|x+2|-1)$ совпадёт со знаком $((x+2)^2-1)$, поэтому

$\begin{cases}((x+2)^2-1)(3x-3x^2)\leq 0;\\ (x+0{,}5)(x-4)<0;\\ x\neq -3,\ x\neq -2,\ x\neq -1.\end{cases}$ $\begin{cases}x(x+1)(x+3)(x-1)\geq 0;\\ (x+0{,}5)(x-4)<0;\\ x\neq -3,\ x\neq -2,\ x\neq -1.\end{cases}$

**Ответ:** $\mathbf{x\in(-0{,}5;0]\cup[1;4)}$.

9) $\log_{x-2}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0$. Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(1;2)$.

10) $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x\sqrt{3-x})\geq 0$. Ответ: $x\in\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

11) $\frac{\log_2(4x+3)}{\log_3(3x+4)}\leq 0$. Ответ: $x\in\left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right]$.

12) $\frac{\log_9 x+4}{1+\log_9 x}\leq 4\log_x 3$. Ответ: $x\in\left(\frac{1}{81};\frac{1}{9}\right)\cup(1;3]$.

13) $\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \le \log_{1-x}(1-2x)$.

Ответ:$x \in \left(-5; -2-2\sqrt{2}\right) \cup [-4; 0) \cup (0; 0{,}5)$.

14) $\dfrac{\log_{0,5}\frac{1}{2x+3}+\log_2(-x)}{\log_5(2x+3)+\log_{0,2}\frac{-1}{2x+1}} \le 0.$ Ответ: $x \in (-1{,}5; -1)$.

15) $\mathbf{\log_{|3x-3|}(25^x-9^x) < \log_{|3x-3|}(5^x+3^x) + \log_{|3x-3|}(5^{x-1}+3^{x-1})}$

ОДЗ: $\begin{cases}|3x-3| \ne 0,\\ 5^x-3^x > 0\end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty).$ Тогда сделаем замену:

$\log_{|3x-3|}(5^x-3^x)(5^x+3^x) << \log_{|3x-3|}(5^x+3^x) + \log_{|3x-3|}(5^{x-1}+3^{x-1}) \Leftrightarrow$

$(|3x-3|-1)(5^x-3^x-5^{x-1}-3^{x-1}) < 0;$

$(|3x-3|-1)\left(\frac{4}{5}\cdot 5^x - \frac{4}{3}\cdot 3^x\right) < 0;$ ещё заменим разность с модулем, тогда $(3x-4)(3x-2)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^{0}\right) < 0;$ $\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1) < 0;$

**Ответ:** $\mathbf{x \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right)}$.

16) $\dfrac{9}{(\log_{2,1}(x-10)^2)\log_{1,9}x} \ge \dfrac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9(\log_{2,1}(x-10)^2)\log_{1,9}x}.$

Ответ: $x \in \left[\frac{10}{9}; 9\right) \cup (10; 11)$.

17) $\mathbf{\dfrac{\log_2(4x+3)\cdot\log_5(2x+5)}{(\log_3 6x)\cdot\log_4 x} \ge 0.}$ **Решение:**

Представим каждый из логарифмов в виде разности двух логарифмов и сделаем 4 раза замену:

$\dfrac{(\log_2(4x+3)-\log_2 1)\cdot(\log_5(2x+5)-\log_5 1)}{(\log_3 6x-\log_3 1)\cdot(\log_4 x-\log_4 1)} \ge 0.$

$\begin{cases}\frac{(4x+3-1)(2x+5-1)}{(6x-1)(x-1)} \ge 0\\ x > 0;\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{(4x+2)(2x+4)}{(6x-1)(x-1)} \ge 0\\ x > 0;\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{(2x+1)(x+2)}{(6x-1)(x-1)} \ge 0\\ x > 0;\end{cases}$;

**Ответ:** $\mathbf{x \in \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup (1; +\infty)}$.

18)

$\mathbf{\dfrac{1-\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{13-x}}{|x^2+2x-15|-|3x^2-24x+45|} \ge 0.}$ **Решение:** Упростим левую часть:

$\dfrac{1+\log_3(x+1)-\log_3(13-x)}{|x-3|\cdot|x+5|-|x-3|\cdot|3x-15|} \ge 0;$ $\dfrac{\log_3(3x+3)-\log_3(13-x)}{|x-3|\cdot(|x+5|-|3x-15|)} \ge 0;$

Сделаем замену:

$\dfrac{(3x+3)-(13-x)}{|x-3|(x+5+3x-15)(x+5-3x+15)} \ge 0,$ при $x+1 > 0,\ 13-x > 0;$

$\dfrac{4x-10}{|x-3|(4x-10)(20-2x)} \ge 0,$ при $-1 < x < 13;$

при $-1 < x < 13,\ x \ne 2{,}5,\ x \ne 3$ имеем

При $-1 < x < 13$, $x \ne 2{,}5$, $x \ne 3$ имеем $\dfrac{1}{x-10} \le 0;$

**Ответ:** $\mathbf{x \in (-1; 2{,}5) \cup (2{,}5; 3) \cup (3; 10)}$.

19) $\mathbf{\log_{17-x^2}(56-x^2+10x) \le \frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}(8+3\sqrt{7}) + \log_{3+\sqrt{7}} 2\right).}$

**Решение:** Преобразуем правую часть:

$$\frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}\left(8+3\sqrt{7}\right)+\log_{3+\sqrt{7}}2\right)=\frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}\left(16+6\sqrt{7}\right)\right)=$$

$=\frac{1}{2}\log_{3+\sqrt{7}}\left(3+\sqrt{7}\right)^2=1.$ Нер-во примет вид:

$\log_{17-x^2}(56-x^2+10x)\le 1;$

$\log_{17-x^2}(56-x^2+10x)-\log_{17-x^2}(17-x^2)\le 0;$

ОДЗ: 1). $56-x^2+10x>0;\ \Rightarrow\ x\in(-4;14)$

2). $17-x^2>0;\ \Rightarrow\ x\in(-\sqrt{17};\sqrt{17})$

3). $17-x^2\ne 1;\ \Rightarrow\ x\ne\pm 4.$

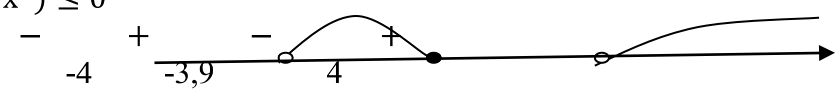
Таким образом, ОДЗ: $x\in(-4;4)\cup(4;\sqrt{17})$.

Сделаем замену и получим:

$(17-x^2-1)(56-x^2+10x-17+x^2)\le 0$

$(4-x)(4+x)(10x+39)\le 0;$

$(x-4)(x+4)(10x+39)\ge 0$




С учетом ОДЗ получаем **Ответ:** $\mathbf{x\in(-4;-3,9]\cup\left(4;\sqrt{17}\right)}$

20) $\frac{10^x}{2(\log^2{}_2(x+1)^2)\log_3(x+2)}\le\frac{(15\cdot 3^x)^x}{9(\log^2{}_2(x+1)^2)\log_3(x+2)}.$ **Решение:**

Разделим обе части нер-ва на $5^x$: $\frac{2^{x-1}}{(log^2{}_2(x+1)^2)\,log_3(x+2)}\le\frac{3^{x^2+x-2}}{(log^2{}_2(x+1)^2)\,log_3(x+2)}.$

$\frac{3^{x^2+x-2}-2^{x-1}}{(log^2{}_2(x+1)^2)\,log_3(x+2)}\ge 0;$ $\frac{3^{(x-1)(x+2)}-3^{(x-1)\,log_3 2}}{(log^2{}_2(x+1)^2)\,log_3(x+2)}\ge 0;$

Решение будем искать при условиях $\begin{cases} x+1\ne 0\\ (x+1)^2\ne 1\\ x+2>0\\ x+2\ne 1\end{cases}$, откуда $\begin{cases} x\ne -1\\ x\ne 0\\ x>-2.\end{cases}$

При этих условиях получаем неравенство:

$\frac{(x-1)(x+2)-(x-1)\log_3 2}{(x+2)-1}\ge 0;$ $\frac{(x-1)(x+2-\log_3 2)}{x+1}\ge 0;$

Получаем:

$\log_3 2-2\le x\le -1,\quad x\ge 1$ **Ответ:** $\mathbf{x\in[\log_3 2-2;-1)\cup[1;+\infty)}$**.**

**Литература:**


1. **Игнатович И.К.** Алгебра и начала анализа: пособие для поступающих в вузы. Минск: ТетраСистемс, 2018.
2. **Колесникова С.И.** Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. М.: Айрис-пресс, 2019.
3. **Колесникова С.И.** Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому государственному экзамену. М.: Айрис-пресс, 2018.
4. **Локоть В.В., Мартынов О. М.** Решение задач ЕГЭ (2010 год): Учебное пособие. М.: АРКТИ. 2011.
5. **Корянов А.Г., Прокофьев А.А**. Методы решения неравенств с одной переменной. Учебное пособие. М.:2020.
6. **Журналы:** Математика в школе. Математика для школьников.